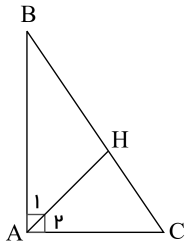
# پاسخنامه تشریحی

۱




$$\begin{cases} \text{فرض} : \hat{A} = ۹۰^\circ \text{ و } \hat{A}_۱ \neq \hat{C} \\ \text{حکم} : AH \not\perp BC \end{cases}$$

اثبات به‌روش برهان خلف:

۱) خلاف حکم را در نظر می‌گیریم یعنی $AH \perp BC$. (فرض خلف)

۲) سعی می‌کنیم عمود بودن $AH$ بر $BC$ را به تناقض برسانیم.

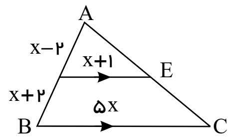
$$\left.\begin{array}{l} A\overset{\triangle}{H}C : \hat{C} + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \to \hat{A}_۱ = \hat{C}$$

که این با فرض مسئله $\hat{A}_۱ \neq \hat{C}$ در تناقض است.

۳) پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود، یعنی:

$$AH \not\perp BC$$

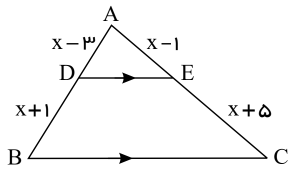
۲ در شکل اول، طبق قضیهٔ تالس داریم:




$$DE \| BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{x-۲}{۲x+۲-۲} = \frac{x+۱}{۵x} \Rightarrow ۵x^۲ - ۱۰x = ۲x^۲ + ۲x$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۱۲x = ۰ \Rightarrow ۳x(x-۴) = ۰ \begin{cases} x = ۰ & \text{غ.ق.ق} \\ x = ۴ & \text{ق.ق} \end{cases}$$

همچنین در شکل دوم، طبق قضیهٔ تالس داریم:




$$DE \| BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x-۳}{x+۱} = \frac{x-۱}{x+۵}$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x - ۱۵ = x^۲ - ۱ \Rightarrow ۲x = ۱۴ \Rightarrow x = ۷$$

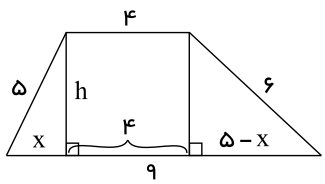
۳ شکل تقریبی ذوزنقه را رسم می‌کنیم و به‌کمک رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ ارتفاع وارد بر قاعده‌ها ($h$) را پیدا می‌کنیم. سپس دو خط موازی به فاصلهٔ $h = ۴٫۸$ رسم کرده و روی یکی از آنها $۴cm$ جدا می‌کنیم از دو سر این پاره‌خط دو کمان به شعاع ۵ و ۶ می‌زنیم تا خط دیگر را در دو نقطه قطع کنند. چهار نقطه به‌دست‌آمده، جواب مسأله است. (به‌هم وصل می‌کنیم)

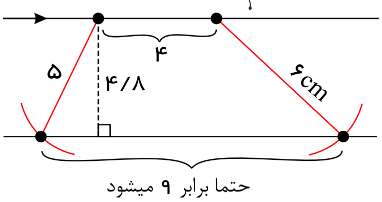
$$\begin{cases} h^۲ = ۳۶^۲ - (۵-x)^۲ = ۳۶ - ۲۵ + ۱۰x - x^۲ \\ h^۲ = ۲۵ - x^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲۵ - \cancel{x^۲} = \overbrace{۳۶ - ۲۵}^{۱۱} + ۱۰x - \cancel{x^۲}$$

$$\Rightarrow ۲۵ - ۱۱ = ۱۰x$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۴}{۱۰} = ۱٫۴ \to h^۲ = ۲۵ - (۱٫۴)^۲ = ۲۵ - ۱٫۹۶ = ۲۳٫۰۴ \to h = ۴٫۸$$





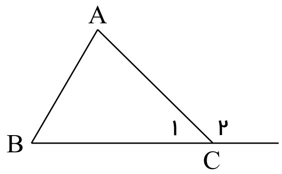

### ۴

$AH' = 12 \ , \ OH = 3 \times 12 = 36 \ , \ OH' = \frac{12}{5} = 2.4$

$$\begin{cases} \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ (\text{متقابل به رأس})\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} O\overset{\Delta}{A}H' \sim O\overset{\Delta}{B}H \rightarrow \frac{OH'}{OH} = \frac{AH'}{BH} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{2.4}{36} = \frac{12}{BH} \Rightarrow BH = \frac{12 \times 36}{2.4} = 180$$

### ۵

$$\text{حکم}: \begin{cases} \widehat{C}_2 > \widehat{A} \\ \widehat{C}_2 > \widehat{B} \end{cases}$$




اثبات: می‌دانیم زاویه‌های یک مثلث مثبت بوده و صفر نیستند. داریم:

$$\text{زاویهٔ خارجی} : \widehat{C}_2 = \widehat{A} + \widehat{B} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\widehat{B} > 0} \widehat{C}_2 > \widehat{A} \\ \xrightarrow{\widehat{A} > 0} \widehat{C}_2 > \widehat{B} \end{cases}$$

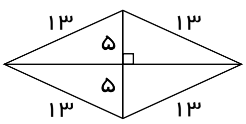
### ۶

قضیهٔ فیثاغورس به‌صورت شرطی: اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد آنگاه مجذور وتر، با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر می‌شود.

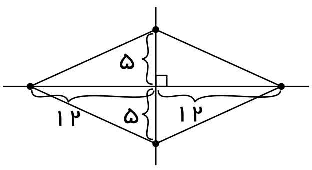
قضیهٔ دو شرطی: مثلث قائم‌الزاویه است، اگر و تنها اگر مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد.

### ۷

شکل فرضی لوزی به‌صورت مقابل است. در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند. بنابراین طبق رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ نصف قطر دیگر لوزی $12cm$ می‌شود.



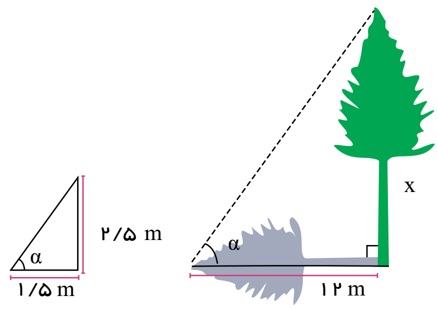

دو خط عمود برهم رسم می‌کنیم و روی یکی از آنها $5cm$ در دو طرف و روی دیگری $12cm$ در دو طرف انتخاب می‌کنیم. این چهار نقطهٔ به‌دست‌آمده را به‌هم وصل می‌کنیم. لوزی به‌دست‌آمده جواب مسأله است.




### ۸

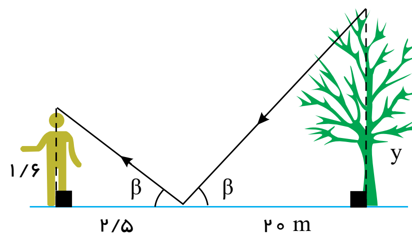
الف) چون زاویهٔ سایه‌ها همیشه در یک مکان مساوی است، داریم:

$$\text{ارتفاع درخت} \quad \frac{1.5}{12} = \frac{2.5}{x} \Rightarrow x = \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \times \overset{5}{\cancel{2.5}}}{\underset{1}{\cancel{\cancel{1.5}}}} = 20m \Leftarrow \text{دو مثلث متشابهند. (زز)}$$



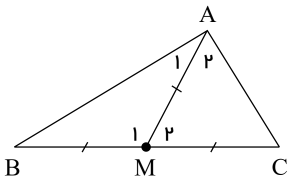

ب) می‌دانیم در انعکاس نور، زاویهٔ تابش و بازتابش برابرند.

$$\text{ارتفاع درخت} \quad \frac{1.6}{y} = \frac{2.5}{20} \Rightarrow y = \frac{1.6 \times \overset{8}{\cancel{20}}}{\underset{1}{\cancel{\cancel{2.5}}}} = 12.8m \Leftarrow \text{دو مثلث متشابهند. (زز)}$$



**۹**

حکم: $\widehat{A}=۹۰^\circ$ فرض: $AM=MB=MC$




$$\begin{cases} AM=MB \rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۱ (۱) \\ AM=MC \rightarrow \hat{C}=\hat{A}_۲ (۲) \end{cases}$$

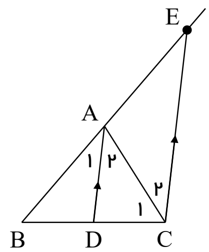
$$\overset{\Delta}{AMB}: \quad \text{خارجی} \quad \widehat{M}_۲=\widehat{B}+\widehat{A}_۱ \overset{(۱)}{=\!=} ۲\widehat{B}$$

$$\overset{\Delta}{AMC}: \quad \text{خارجی} \quad \widehat{M}_۱=\widehat{C}+\widehat{A}_۲ \overset{(۲)}{=\!=} ۲C$$

$$\underbrace{\widehat{M}_۱+\widehat{M}_۲}_{۱۸۰^\circ}=۲\widehat{B}+۲\widehat{C} \xrightarrow{\div ۲} \widehat{B}+\widehat{C}=۹۰^\circ \rightarrow \widehat{A}=۹۰^\circ$$

یعنی $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است.

**۱۰**

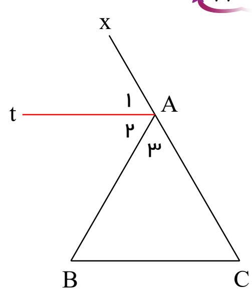



فرض: $\begin{cases} AD \parallel CE \\ \widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲ \end{cases}$ حکم: $(AC=AE)$ متساوی الساقین است $\overset{\Delta}{ACE}$

$$\left.\begin{matrix} AD \parallel CE \xrightarrow{\text{مورب } AC} \widehat{A}_۲=\widehat{C}_۲ \\ AD \parallel CE \xrightarrow{\text{مورب } AE} \widehat{A}_۱=\widehat{E} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲} \widehat{E}=\widehat{C}_۲$$

پس مثلث $ACE$ متساوی‌الساقین است یعنی $AC=AE$.

**۱۱**




فرض: $\begin{cases} AB=AC \\ \widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲ \end{cases}$ حکم: $At \parallel BC$

$$\widehat{A}_۳+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{B}=\widehat{C}} \widehat{A}_۳+۲\widehat{B}=۱۸۰^\circ \quad (۱)$$

$$\widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲+\widehat{A}_۳=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲} \widehat{A}_۳+۲\widehat{A}_۲=۱۸۰^\circ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۲\widehat{B}=۲\widehat{A}_۲ \rightarrow \widehat{B}=\widehat{A}_۲ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیهٔ خطوط}} At \parallel BC$$

**۱۲** در ذوزنقهٔ $ABCD$ وسط ساق $AD$ را $M$ و وسط ساق $BC$ را $N$ می‌نامیم و از $M$ به $N$ وصل می‌کنیم. حال از $A$ به $N$ وصل نموده، امتداد می‌دهیم تا امتداد قاعدهٔ $CD$ را در نقطهٔ $E$ قطع کند. دو مثلث $ABN$ و $NCE$ هم‌نهشت هستند. پس $AB=CE$ و $AN=NE$ است و $DE=DC+CE=DC+AB$. از طرفی، چون $MN \parallel DE$ و نقطه‌های $M$ و $N$ وسط ضلع‌های $AD$ و $AE$ از مثلث $ADE$ هستند. طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\overset{\Delta}{ADE}: \frac{AM}{AD}=\frac{MN}{DE}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow MN=\frac{۱}{۲}DE=\frac{۱}{۲}(AB+CD)$$